Prolegomena

till hvarje blifvande allmän Storhetslära,

med Vidtberömda Filosofiska Fakultetens minne,

under skydd

af

Mag. CARL JOH. D^{s} HILL,

Prof. i Math.

till Lagerkransens vinnande

försvarade i stora Auditorium

den 11 Juni 1844

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

af

ROBERT DELAGARDIE,

Filosofie Kandidat af Skånska Nationen.

I.

Lund,

tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,

1844.

Prolegomena

till hvarje blifvande allmän Storhetslära.

(Afhandling, presenterad vid vetensk. sammanträdet i Götheborg 1839.)

I) Om Addition.

Ett förhör med Herrar Arithmetici.

J. Mine Herrar Arithmetici, J beklagen eder öfver filosofernas alltför hårda och orimliga yttranden om eder vetenskap, såsom varande både begrepp- och tanklös m. m. Jag torde vid ett annat tillfälle finna mig föranledd, att uppvakta dessa sednare i detta afseende; men för det närvarande finner jag mig nödsakad med eder sjelfva anställa ett litet husligt förhör, för att utröna, om J så väl förvaltat eder sak, att J ej genom edert eget sätt att framställa vetenskapen föranledt nyssnämnde yttrande. Hafven J t. ex. ens bibehållit Arithmetiken på den vetenskapliga ståndpunkt, å hvilken Euclides lemnade er den?

Alle (med en munn): Vi hafva förbättrat den, till bevis hvarpå vi blott behöfva anföra det Arabiska eller rättare Indiska numerationssättet, som alla erkänna vara så förträffligt, att det i sig liksom in nuce redan innehåller det väaendtligaste i Arithmetiken.

J. I detta första Kapitlet stån J eder nog väl, ehuru äfven det hos mången torde behöfva en mera mångsidig utbildning. Det var ej heller en del Greker så obekant, som J inbillen er. Men låtom oss gå till det andra: hafven J vederbörligen utredt begreppet *summa* och låt oss till yttermera visso höra hvad Herrarne förstå härmed?

Flere: Summa är det som erhålles, då flere tal adderas tillsamman eller, det enda tal, som genom addition af flere erhålles.

J. Visserligen kan summa anses för resultatet, eller facit, af addition; men mån-tro ej saken är lika litet dermed utredd, då dervid alltid återstår den hufvudfrågan, hvad är *Addition?* hvad *Addera?*

Herrar A. B. C. F.: Addera — det är att sammanlägga flere tal till en enda summa, eller att sammantaga flere summor till en enda, eller att finna flere tals summa.

J. Men, mine Herrar, då J sägen sammanlägga, eller sammantaga (zusammen-nehmen), hafven J gjort annat, än blott öfversatt *addera;* och då J uti er förmenta definition infören ordet *summa*, hvars begrepp J nyss förut sade just genom Addition skulle förklaras, gören J väl annat än en högst felaktig circulus in definiendo? Åter, hvad är då summa?

O. Det är "hvarje tecken af formen $a+b$."

J. Om förlåtelse, då skulle summa kunna anses vara resultatet af hvad operation som helst, och t. ex. 9 kunna anses för summan af 2 och 3, enär 3, upphöjdt till 2:a potensen, gör 9, ($3^2=9$); eller summan af $\frac{2}{3}$ och $\frac{3}{4}$ vara $\frac{5}{7}$. Allt skulle så sammanfalla i en röra.

O. Jag torde uttryckt mig väl obestämdt och sålunda något oriktigt, men jag får erinra, att jag med a och b ej förstår annat än hela tal, eller deras skilnad. Förstodes dermed blott det förra, så skulle jag säga, att "tecknet $a+b$ betyder det tal, som har (innehåller) så många enheter, som a och b tillsammanstagne hafva (eller innehålla)."

H. Jag antager ock denna definition.

J. Således åter "tillsammantaga", åter en circulus. Och för öfrigt kan man ej addera annat än hela tal: Finnes ej i alla Herrarnes Arithmeticor också *addition i bråk?* Och skulle man icke äfven kunna tänka sig en addition af ett par linier, ett par ytor o. s. v.

K. Efter allt sundt förstånd kan jag ej finna annat än att *addera* är "att finna ett tal, som ensamt är lika stort med två, eller flere gifna" och på ett dylikt sätt bör man väl äfven kunna förklara andra storheters addition.

J. Du, min vän! synes väl hafva undgått en circulus in definiendo, då i din definition hvarken förekommer ordet sammanlägga, eller summa, eller något

dylikt, men din definition är dock först och främst icke genetisk, så att man enligt den kan inse, huru en summa skall finnas.

K. Om förlåtelse, det är ej nödvändigt, blott saken annars är nog tydligen förklarad.

J. Se, det är just hvad den icke är. En jemförelse mellan de gifna och det sökta talets storlek, ser man nog är i fråga; men huru skall man finna att ett tal är så stort, som tvenne andra, och kan sådant ej ske på flere sätt, och kan t. ex. 12 ej anses vara lika stort som 3 och 4, då 3 gånger 4 gör 12?

L. Min Herre multiplicerar, men det förutsätter någon talens likhet, jag tror att definition bör blifva denna: "addera är att bringa skiljaktiga (verschiedene) gifna tal tillsammans till ett enda, som är lika stort med de särskilta talen tillsammans."

C. Detta är just min definition, fast litet omständligare uttryckt. Jag har, utgående från den, gått ganska demonstrativt till väga.

Lc. Vid addition är ej frågan om annat än att förena två eller flere tal till ett enda: detta är denna operations hela ändamål.

J. Men, mine Herrar, månne man ej vid hvarje annan Arithm. operation vill af två storheter erhålla en tredje, uti hvilken de kunna anses förenade — om jag säger 3 och 4 göra 12, äro då ej 3 och 4 förenade till ett enda tal 12? — Och kan man ej addera lika tal t. ex. 3 och 3, utan att just nödvändigt anse sådant för multiplication. Och slutligen, om herrarne tro sig böra lägga någon vigt på ordet "tillsammans," så måste jag återkomma till min förra invändning.

Lc. Jag vill närmare förklara mig så: addition är blott en förkortning af talens bildande genom att steg för steg tillägga enheten (par l'addition successive de l'unité).

J. Men "tillägga" det är ju addera, och således åter blott en öfversättning.

B. Jag tror ock att addition är ett sammanräknande (= ein Zusammenzählen).

Cl. Det är också min mening, men saken måste närmare förklaras, nemligen så: "addition är en operation, hvarigenom flere tal (eller storheter af samma slag) så sammanräknas (Zusammengezählt werden), att de kunna uttryckas genom ett enda tal, hvilket kallas deras summa."

J. J, mine Herrar, tyckas nu vara någorlunda på rätta vägen, så vida J med edert "Zusammenzählen" menen *täljande,* numeration *i sin* allmänna betydelse, ehuru man på den vägen svårligen torde kunna förklara annat än addition af hela tal. Då dock af samtlige Herrarnes mer eller mindre misslyckade försök vill synas, det saken ej saknar sina betydliga svårigheter, skulle äfven med det sistnämnda redan mycket vara vunnet; hvarföre vi dervid torde böra uppehålla oss något vidare.

Alle: Må gjordt. Men vi förbehålla oss dock, att det må medgifvas, det vi åtminstone försökt gå något längre än Euclides, hvilken, så vidt vi kunna erinra oss, ingenstädes lemnar någon definition på summa, hvilken han kallar det hela (totum). Man borde derföre förvandla det derom handlande axiomet (om man lägger lika till lika, så blifva de hela lika) till en definition, enligt hvilken *addition* vore den operation, som, använd på lika storheter, ger lika resultat. Men då skiljdes den i ingenting från de öfrige IV Species.

J. Och kanske ej heller från många andra operationer. Men derom sedermera. Låt oss blott för beqvämlighet skull kalla en så beskaffad operation *enformig.* Låt oss nu höra huru herrarne addera hela tal.

Flere: Det kan man göra på flere sätt: man kan antingen börja uppifrån eller nedifrån; särdeles om de äro enziffrige. Om t. ex. 3, 4, och 5 skola adderas, så kan man först addera 3 och 4, gör 7, så 7 och 5, gör 12, eller ock först 5 och 4 gör 9, så 9 och 3 gör 12, eller detsamma, som på förra sättet.

J. För att indirecte försvara Euclides, skulle äfven jag kunna förvandla herrarnes första regel om addition i des definition, och sedermera visa att den ej försloge att skilja denna operation från många andra t. ex. multiplication. Men äfven derom sedermera. Men hållom oss vid det förevarande exemplet, och utredom huru det kommer sig att 3 och 4 göra just 7 och ej något annat tal, t. ex 12.

Flere: Jo det kommer sig deraf att vi addera dem tillsammans, och ej multiplicera dem tillsammans.

J. Här bruka herrarne åter sitt "tillsammans", men i tvenne olika betydelser och frågan är, att åtminstone i detta concreta fall, få utredt hvad det vill säga att *addera 3 och 4 tillsammans,* för att derigenom sedermera kunna

höja oss till et allmännare begrepp af addition och des facit (summa). Huru finna herrarne, att nyssnämnde summa just är 7?

Flere: Det veta vi af additions-tabellen, som vi alla kunna utantill.

J. Men huru construeras en sådan tabell och huru vises des riktighet?

Flere (- - - hesitera): Det har ej fallit oss in, att draga des riktighet i tvifvelsmål och således hafva vi ej heller kunnat bekymra oss om des bevisande.

Andre. Åh! den lära vi barnen utantill, och innan de kunna den, få de tälja på sina fingrar.

J. Var god och gör så i närvarande fall.

Lc. Jo för att lägga 4 till 3 (eller något annat tal), håller jag upp mina 4 fingrar och fortsätter täljandet af 1, 2, 3, så länge tills jag för hvar och en af dem har nämnt hvar sitt af de på detta (3) följande fyra talen 4, 5, 6, 7, då det det sista (7) just anger summans namn.

J. Det är riktigt, och deri ligger också verkligen det rätta begreppet af *hela tals summa* doldt.

Lc. Äfvenså om till 7 skall läggas 6, så måste man i talserien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 höja sig 5 steg öfver 7, eller tälja vidare de följande (fem) sifrorna 8, 9, 10, 11, 12, då den 5:te af dem (som är 12) betecknar summan af 7 och 5.

J. Af de nu anförda exemplen kunna vi ju klarligen se, att addition af hela tal ej är annat än en afbruten numeration eller snarare en förening af flere särskilte numerationer: såsom när jag har tvenne högar nötter, och jag genom täljande af hvardera funnit t. ex. i den ena 2 och i den andra 3, så måste, när dessa begge högarne blifvit sammanmakade till en enda, uti denna hög finnas så många nötter, som summan af 2 och 3 utgör, och denna summa finnes naturligtvis tvärtom genom att tälja nötterna i den nya högen. För att tydligen se, huru summan af 2 och 3 uppkommer af dessa talen och således af dem beror, och för att således med detsamma hafva den rätta definition på *summa* gifven, låt oss kalla den ena högen, den med 2 nötter för *a* (. .) och den andra, *b* (. . .) *). Då äga vi frihet att ställa alla nötterna i en rad, men med något

*) Punkterne föreställa här nötter, eller hvarje andra ting, som skola räknas eller rättare täljas (gezählt werden).

mellanrum mellan de begge högarne, att de kunna skiljas åt och således anses vara ej ännu så makade intill hvarandra, att de utgöra en enda hög. Vid täljandet af hvardera säger man [a]) $\dot{1}$ $\dot{2}$ | [b]) $\dot{1}$ $\dot{2}$ $\dot{3}$
men vid den hopmakade 1 2 3 4 5:
d. ä. i stället för att kalla den första nöten i *b)* för ett (1), kommer man genom fortsättning af det vid *a)* påbegynta täljandet (1, 2) att kalla densamma 3, den andre i *b* heter nu 4, och slutligen den tredje eller sista kallas 5, eller rättare den femte, hvilket tal (5) just genom detta täljande är på et eget sätt bestämdt af talen 2 och 3, hvilket vi just mena då vi säga, att 5 är summan af 2 och 3.

På samma sätt om i *a)* äro 5 och i *b)* 4 nötter, så blir det isolerade
täljandet: [a]) $\dot{1}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$, $\dot{5}$, | [b]) $\dot{1}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$,
och det hopade 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
hvarigenom man likaledes finner, att summan af 5 och 4 är 9, det vill säga, det talet, hvarpå man vid täljandet kommer att stadna, när man upptäljt de 4 näst efter 5 följande talen (6, 7, 8, 9) *).

---

*) Med tillhjelp af den funna definitionen kunna lätt de vanliga satserna om addition bevisas, så vidt frågan är om hela tal, t. ex. denna $a + b = b + a$.

Låt a vara $= 2$, och $b = 3$, så skall det visas, att $2 + 3$ är $= 3 + 2$. Först är såsom nyss $2 + 3 = 5$,

neml. $\left\{ \begin{array}{l} {}^{a)}\ \dot{1},\ \dot{2},\ |\ {}^{b)}\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3}, \\ \quad\ 1,\ 2,\qquad\ \ 3,\ 4,\ 5, \end{array} \right\}$

eller tvertom $5 = 2 + 3$, d. ä. täljningen 1, 2, 3, 4, 5 kan, genom att göra halt vid (eller snarare efter) 2, upplösas i tvenne, 1, 2 och 1, 2, 3, hvarföre $5 = 2 + 3$. Men man kan ock hämma täljningen vid 3, då man får $\left\{ \begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3;\ \ 4,\ 5 \\ 1,\ 2,\ 3;\ \ 1,\ 2 \end{array} \right\}$ och således finner man äfven $5 = 3 + 2$. Men för att alltid, om $a + b$ gör c, och man sedermera upplöser denna summan c uti b och en annan del α, så att äfven $c = b + \alpha$, då inse, det denna del α är $= a$, så kan märkas, att då et tal c är upptäljt t. ex. $c = 5$ så: 1, 2; 3, 4, 5, så kan man såsom et prof också tälja
omvändt 5, 4; 3, 2, 1. Om man nu afbryter förra täljningen vid 2, och således finner $5 = 2 + 3$ (såsom nyss), så ser man tydligen, att den sednare blir afbruten vid 3, eller står så $\left\{ \begin{array}{l} 5,\ 4;\ \ 3,\ 2,\ 1 \\ 2,\ 1;\ \ 3,\ 2,\ 1 \end{array} \right\}$, eller om den åter vändes om, par-

På samma sätt kan i hvarje annat fall summan af två hela tal, både genom et sådant täljande definieras, och äfven finnas, ehuru detta vid stora tal skulle komma att blifva besvärligt. Det är ock, för att underlätta detta fall, som de vanliga additions-reglorne äro behöfliga: men för små tal kan man alltid följa definitionen, tills man sålunda både funnit och lärt sig utantill en mindre additions-tabell.

Flere Ar. Efter denna anvisning tro vi oss väl kunna reda oss, äfvensom vi derifrån inse en möjlighet att definiera summan af flere tal, äfvensom summan af bråk.

J. Jag vill derföre ej uppehålla mig dervid, men får i sednare afseendet blott erinra, att alla bråk alltid återföres till addition af hela tıl. Äfven definition af *skillnad* är med detsamma gifven och det antingen formelt och abstract så: om c är summan af a och b eller $a + b = c$, så säges a vara skillnaden emellan c och b, hvilket tecknas $a = c - b$, eller ock mera konkret så: skillnaden emellan 9 och 4 är det sista (5) af de fyra talen, hvartill man kommer genom att tälja baklänges de fyra tal, 8, 7, 6, 5, som föregå 9. I allmänhet, då man skall upptälja et större tal t. ex. 17, så kan man göra hallt hvar som helst, t. ex. vid 10 (eller sedan 1, 2, 3, . . . 9, 10 blifvit uppträljda), och då påbegynna en ny täljning 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (i stället för
11, 12, 13, 14, 15, 16, 17); då det sista (7) af dessa är skillnaden mellan det större (17) och det (10) vid hvilket gjordes hallt; äfvensom det större (17) säges vara summan af hvardera af dessa sluttalen (10 och 7). Häraf ses ock, att *summa* och *skilnad* äro oskiljaktiga begrepp.

Flere Ar. Denna förklaring torde icke allenast vi, utan äfven Filosoferna finna nöjaktig och sjelfva *Kant,* si in vivis esset, torde vid nogare öfvervägande finna flere Arithmetiske sanningar Analytiska, än han hittills ansett.

J. Jag vill hoppas det, dock återstår ännu något att orda om begreppet *s u m m a.*

---

tielt $\left\{\begin{matrix}5, & 4; & 3, & 2, & 1\\ 1, & 2; & 1, & 2, & 3\end{matrix}\right\}$, eller helt $\left\{\begin{matrix}1, & 2, & 3; & 4, & 5\\ 1, & 2, & 3; & 1, & 2\end{matrix}\right\}$, hvaraf det är genast tydligt, att 5 också är $= 3 + 2$, och således $2 + 3 = 3 + 2$. På samma sätt kan derföre alltid visas (eller är härmed verkligen bevist, då 2 och 3 kunde hafva varit hvilka andra hela tal, som helst), att i allmänhet $a + b = b + a$, så vida a och b äro hela tal.

Ehuru det anförda skulle kunna, äfven med vissa modifikationer, användas till förklarande af surda tals summa, så torde ännu något mörker hvila öfver begreppet 2:ne storheters summa. Men låt oss återgå till våra 2:ne rader nötter

a) . . . . . och *b)* . . . .

hvilka vi hopfogade till enda rad

c) . . . . . | . . . .

På samma sätt, om vi hafva tvenne linier

a) ——————————— *b)* ———————————

så kunna de på et analogt sätt hopfogas till en enda linie

c) ——————a——————.——————b——————

hvilken genom punkten der hopfogningen skedde, kan anses delad i 2:ne delar, hvilkas summa, eller hela, hon också är. Härigenom föranledes vi till et allmännare begrepp om summa, som är följande: Om till en storhet *a)* fogas en annan *b)* af samma slag, så att de få en grens gemensam, hvilken sedermera anses borttagen, så uppkommer deraf en ny storhet, *c,* hvilken säges vara de förras *summa:* $(a + b = c)$. Hafva de ingenting mer än grensen gemensam, så är detta, A————————B.——————C, en *verklig summa;* annars blott en Algebraisk, eller en skillnad, nämligen när den sednare storheten kommer att utgöra en del af den förra. Så, om till linien *AB* fogas *BC* utåt, så är hela linien *AC* summan af *AB* och *BC;* om deremot å linien *AC* vid des ena grens *C* afsättes *CB* inåt; att *BC* utgör en del af *AC,* så blir *AB* skillnaden mellan *AC* och *BC,* ehuru den kan anses såsom en Algebraisk summa. Derföre ega ock addition och subtraction i det hela likartade grundreglor och utgöra gemensamt den första grundoperation.

Lb. Den sednare definition anser jag för allmän, helst hvarje storhet har utsträckning, eller såsom sådan kan föreställas.

J. Detta är väl ej alldeles det riktiga begreppet om storhet, men i alla fall följer med detta äfven begreppet om *grens,* så att till och med emellan ett par hela tal kan tänkas en grens, hvarigenom den föregående definition på hela *tals summa* äfven måste finnas inbegripen i den nu gifna allmänna. I allmänhet måste de storheter, som skola adderas, vara likartade och således äfven deras grensor likartade, hvarföre dessa ock, till större eller mindre del, måste kunna fås att sammanfalla. Man finner ock lätt af den användning Euclides gör af